Harmonisation des notes issues des différents correcteurs par la méthode de l'espérance structurelle

E. Maza

28 janvier 2008

Résumé

Il est un problème récurrent que se pose le jury d'un concours lorsqu'il a devant lui les notes des candidats issues des différents correcteurs. Il s'agit du problème de l'harmonisation des notes. L'effet du correcteur sur la note d'un candidat du concours a été maintes fois mis en évidence en docimologie, et la note finale du candidat ne peut être celle donnée par son correcteur si l'on souhaite comparer objectivement les notes de tous les candidats. Nous proposons ici une méthode statistique permettant de pallier à ce problème.

1 Introduction

Lorsque l'ampleur d'un concours – en nombre de candidats – est telle que l'appel a de multiples correcteurs est nécessaire, le problème de l'harmonisation des notes surgit inévitablement. Le jury final, lorsqu'il a devant lui les notes des candidats issues des différents correcteurs, se doit de classer les candidats d'après ces notes obtenues. Mais ce classement n'est pas aisé. En effet, l'effet des correcteurs sur les notes des candidats a été maintes fois prouvé statistiquement. Et cet effet rend le problème du classement très ardu. C'est ce délicat travail que l'on nomme habituellement "l'harmonisation des notes".

Nous propose ici une méthode, dite de "l'espérance structurelle", pour pallier à ce problème. Cette méthode est une simple mais non moins intéressante application de nos recherches sur les déformations stochastiques d'une courbe. Les données utilisées ici pour illustrer cette méthode sont celles d'un concours national français.

2 Position du problème

Nous avons n candidats participant à une épreuve. Ces candidats sont répartis en m correcteurs. Le correcteur numéro i corrige les épreuves de n_i candidats. Nous avons $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ candidats. Les notes obtenues par ces candidats sont notées

$$X_{ij},\ i \in \{1, \ldots, m\},\ j \in \{1, \ldots, n_i\}.$$

L'effet induit par le jury sur les notes obtenues par les candidats est le plus souvent indéniable. C'est le cas pour nos données illustratives. Nous avons approximativement $n = 4000$ candidats et $m = 13$ correcteurs. Ces correcteurs notent donc chacun approximativement 300 candidats. L'effet du correcteur apparait très clairement sur le diagramme en boîtes parallèles des notes (Figure 1). En effet, en supposant que chaque candidat a été assigné à un correcteur de manière aléatoire, les différences observées sur les répartitions des notes de la figure 1 peuvent être supposées imputables à l'effet correcteur. Ainsi, dans notre exemple, un candidat ayant été noté par le correcteur numéro 4 pourrait se sentir laisé.

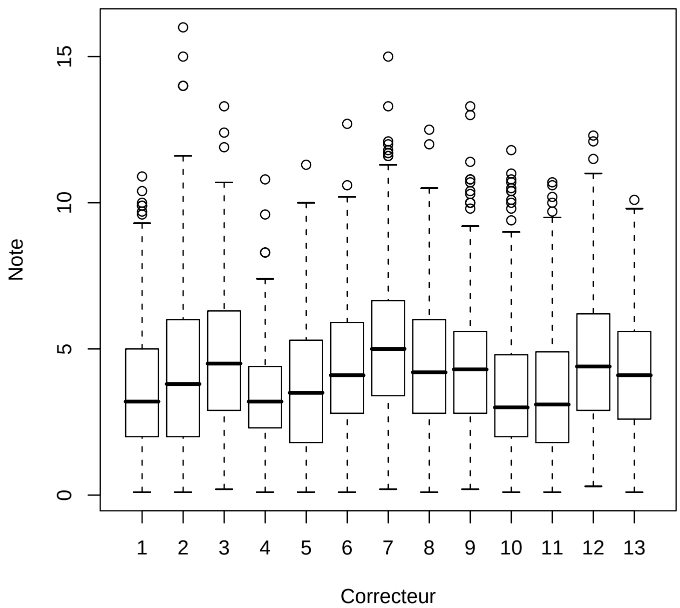

FIG. 1 – Diagramme en boîtes parallèles des notes.

Dans ces conditions, les notes issues des différents correcteurs ne sont pas comparables. Un candidat donné aurait obtenu une note a priori différente s'il avait été dans un autre jury que celui qui lui été destiné. Il s'agit donc ici de se doter d'une méthode nous permettant de comparer les notes des différents candidats. Autrement dit, il s'agit ici d'harmoniser les notes afin d'estomper l'effet induit par les correcteurs.

3 Principe de la méthode

Le principe de cette méthode est le suivant. Nous allons associer à chaque candidat la moyenne des notes qu'il aurait obtenues s'il avait été corrigé par tous les correcteurs. Pour le candidat numéro j du correcteur numéro i, si l'on note X_{ij}^k la note qu'il aurait obtenue avec le correcteur numéro k, cette moyenne s'écrit

$$Y_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k. \tag{1}$$

Bien évidemment, les notes

$$X_{ij}^k,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n_i,\ k = 1, \ldots, m,$$

sont, pour la plupart, inconnues. En effet, on peut bien évidemment remarquer que $X_{ij}^i = X_{ij}$, mais les $m-1$ autres notes associées doivent quant à elles être estimées pour pouvoir calculer la moyenne (1).

4 Le Modèle

D'une part, soient

$$X_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

les notes intrinsèques des candidats. Par définition, ces notes dépendent uniquement des candidats et sont donc indépendantes des correcteurs qui leurs seront attribués. Ces notes peuvent être interprétées comme celles obtenues avec un seul jury qui noterait tous les candidats. Notons F la fonction de répartition de ces notes.

D'autre part, l'effet du correcteur numéro i sur le candidat numéro j peut s'exprimer comme une déformation aléatoire de la note X_j par une fonction $H_i : [0, 20] \to [0, 20]$:

$$X_{ij} = H_i\left(X_j\right). \tag{2}$$

Nous supposerons que les fonctions de déformation aléatoire H_i sont :

(1) Continues.
(2) Strictements croissantes.
(3) Telles que $H_i(0) = 0$ et $H_i(20) = 20$.
(4) Indépendantes et identiquement distribuées.
(5) Telles que, pour tout $x \in [0, 20]$, $\mathbb{E}(H_i(x)) = x$.

De plus, nous noterons F_i la fonction de répartition des notes des candidats corrigés par le correcteur numéro i. Ces fonctions de répartition sont représentées sur la figure 2. L'effet du correcteur est aussi visible dans cette représentation.

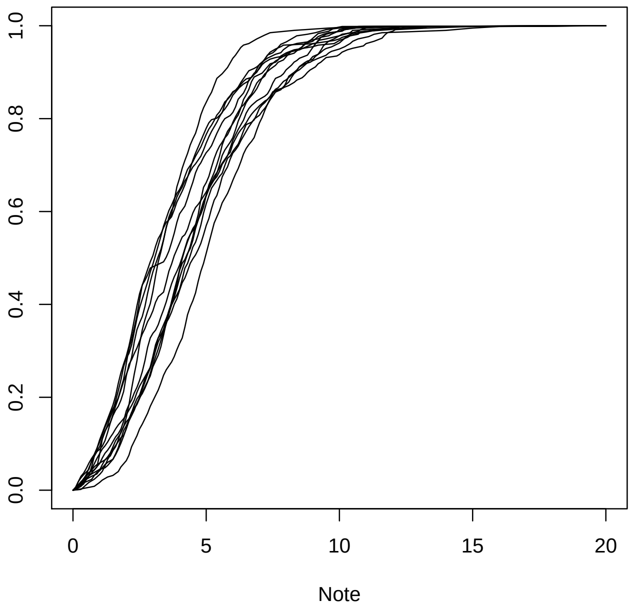

FIG. 2 – Les fonctions de répartition des notes.

En supposant que les classements des candidats restent inchangés après les déformations aléatoires, les fonctions de répartition F et F_i sont liées par le modèle

$$F_i = F \circ H_i^{-1}. \tag{3}$$

Le modèle (3) est un modèle de déformation d'une fonction F inconnue par un processus aléatoire H de même loi que celle des H_i. Ce modèle est traité de manière théorique dans [Maza] et [Dupuy]. On appelle "espérance structurelle" de F_i, la fonction de répartition

$$\mathbb{ES}(F_i) = F.$$

C'est cette espérance structurelle qui est estimée dans [Maza] et [Dupuy] et qui nous permet de retrouver nos notes harmonisées. En effet, d'après notre modèle (3), pour le candidat numéro j du correcteur numéro i, nous avons

$$F^{-1} \circ F_i \left(X_{ij}\right) = H_i^{-1} \left(X_{ij}\right).$$

Enfin, d'après (2), nous avons

$$F^{-1} \circ F_i \left(X_{ij}\right) = X_j. \tag{4}$$

Il suffit donc bien d'estimer la fonction de répartition F et la fonction de répartition F_i pour pouvoir estimer la note X_j.

5 L'estimation

Nous donnons dans ce paragraphe les estimations de la fonction de répartition F et des fonctions de répartition F_i pour pouvoir estimer la note X_j de chaque candidat par l'équation (4).

Soit $L(i)$ le nombre de notes différentes obtenues par les candidats corrigés par le jury numéro i. On écrit ces notes

$$0 = x_{i0} < x_{i1} < x_{i2} < \cdots < x_{iL(i)-1} < x_{iL(i)} < x_{iL(i)+1} = 20$$

et les fréquences empiriques de ces mêmes notes

$$0 = p_{i0} < p_{i1} < p_{i2} < \cdots < p_{iL(i)-1} < p_{iL(i)} < p_{iL(i)+1} = 1.$$

Une estimation de la fonction de répartition empirique de ces notes peut s'écrire

$$F_i(x) = \sum_{l=1}^{L(i)+1} \frac{p_{l-1} + p_l}{2} \mathbf{1}_{[x_l, 20]}(x) + \sum_{l=1}^{L(i)+1} \frac{x - x_{l-1}}{x_l - x_{l-1}} \frac{p_{l-1} + p_l}{2} \mathbf{1}_{]x_{l-1}, x_l[}(x).$$

Les fonctions de répartition ainsi construites sont strictement croissantes. Il s'agit des fonctions de répartition de la figure 2.

Avec les notations précédentes, une estimation de l'espérance structurelle est donnée par

$$F = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} F_i^{-1}\right)^{-1}. \tag{5}$$

Ainsi, pour une note donnée X_j classée au rang α_j, c'est-à-dire telle que $F\left(X_j\right) = \alpha_j$, et d'après l'équation (5), nous avons

$$F^{-1}\left(\alpha_j\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} F_i^{-1}\left(\alpha_j\right).$$

Et nous retrouvons donc bien l'équation (1), soit

$$X_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} X_{ij}^k.$$

6 Résultats

L'estimation de la fonction de répartition F des notes est représentée par la figure 3.

Le diagramme en boîtes parallèles des notes harmonisées est présenté sur la figure 4. Il est maintenant évident que l'effet correcteur a été entièrement corrigé.

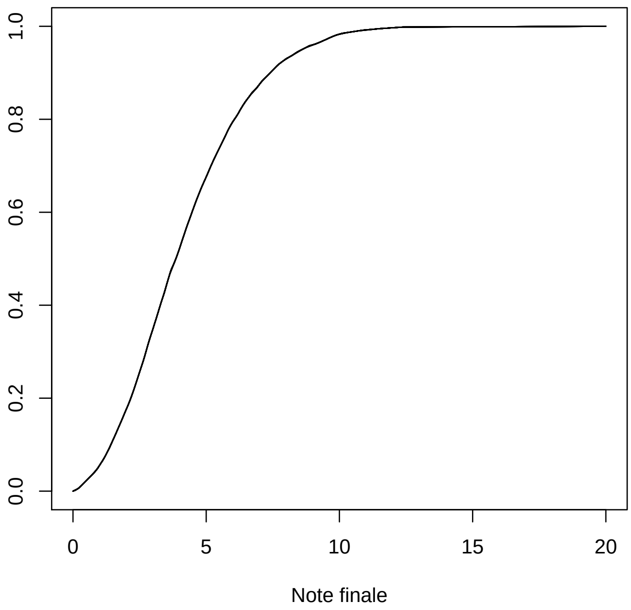

FIG. 3 – Les fonctions de répartition des notes harmonisées.

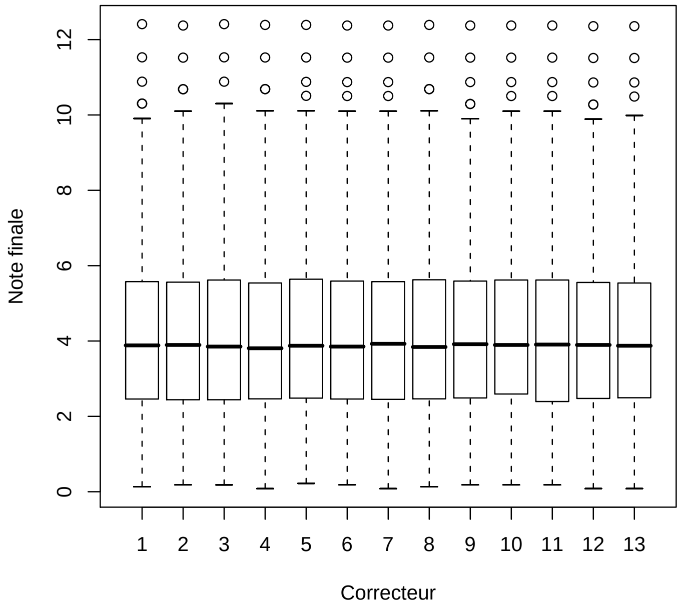

FIG. 4 – Diagrammes en boîtes parallèles des notes harmonisées.

Références

[Maza] ***Estimation de l'espérance structurelle d'une fonction aléatoire.*** E. MAZA. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Volume 343, Issue 8, pp. 551–554, 2006.* `http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2006.09.022`

[Dupuy] ***Non parametric estimation of the structural expectation of a stochastic increasing function.*** J-F. DUPUY, J-M. LOUBES AND E. MAZA. *A paraître.*